2015年 工学部 第2問

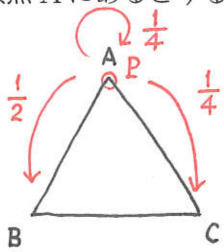
2 点Pは正三角形ABCの辺に沿って頂点を移動できる．このとき，次の操作を考える．

（操作）2枚の硬貨を同時に投げる．表が2枚出れば，点Pは時計回りに隣の頂点に動く．表が1枚だけ出れば，点Pは反時計回りに隣の頂点に動く．表が出なければ，点Pは動かない．

この操作を続けて行うとき，次の問いに答えよ．ただし，点Pははじめに頂点Aにあるとする．

(1) 2回目の操作終了時に，点Pが頂点Aにある確率を求めよ．

(2) 4回目の操作終了時に，点Pが頂点Aにある確率を求めよ．



(1) 1回の操作で，時計回りに動く確率は．$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

動かない確率は．$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

反時計回りに動く確率は．余事象より．$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

2回目の操作終了時にAにあるのは．

↷↶ ，↶↷ ，止止 のいずれかであるから．

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \underline{\frac{5}{16}}$ //

(2) n回目の操作終了時にA，B，Cにある確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とおくと，

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \end{cases}$$

これをくり返し使って，

$$\begin{aligned} p_4 &= \frac{1}{4}p_3 + \frac{1}{4}q_3 + \frac{1}{2}r_3 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}q_2 + \frac{1}{2}r_2\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{4}q_2 + \frac{1}{4}r_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{4}r_2\right) \\ &= \frac{5}{16}p_2 + \frac{3}{8}q_2 + \frac{5}{16}r_2 \\ &= \frac{5}{16}\left(\frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}q_1 + \frac{1}{2}r_1\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}q_1 + \frac{1}{4}r_1\right) + \frac{5}{16}\left(\frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{4}r_1\right) \\ &= \frac{11}{32}p_1 + \frac{21}{64}q_1 + \frac{21}{64}r_1 \end{aligned}$$

$p_1 = \frac{1}{4}$，$q_1 = \frac{1}{2}$，$r_1 = \frac{1}{4}$ より．$\underline{p_4 = \frac{85}{256}}$ //