0001857812418999

# 和歌山大学

2014年 第1問

数理
石井K

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が，$a_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$，$b_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$ で定められている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 1$ に対して，$b_{n+1} < a_n < b_n$ が成り立つことを示せ．

(2) $8 < \displaystyle\sum_{k=1}^{40} b_k < 9$ が成り立つことを示せ．

(1)
$$a_n - b_{n+1} = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
$$= \frac{2n+1-\sqrt{4n^2-1}-1}{\sqrt{2n+1}}$$
$$= \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}}$$
$$> \frac{2n-\sqrt{4n^2}}{\sqrt{2n+1}}$$
$$= 0$$
$\therefore\ a_n - b_{n+1} > 0$ つまり．$a_n > b_{n+1}$

$$b_n - a_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}$$
$$= \frac{1-\sqrt{4n^2-1}+2n-1}{\sqrt{2n-1}}$$
$$= \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}}$$
$$= \frac{\sqrt{4n^2}-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}}$$
$$> 0$$
$\therefore\ b_n - a_n > 0$ つまり $b_n > a_n$

以上より．$b_{n+1} < a_n < b_n$ ∎

(2) (1) より．$a_n < b_n < a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$

$$\therefore\ \sum_{k=2}^{40} a_k < \sum_{k=2}^{40} b_k < \sum_{k=2}^{40} a_{k-1} \iff \sqrt{81}-\sqrt{3} < \sum_{k=2}^{40} b_k < \sqrt{79}-1$$

両辺に $b_1\,(=1)$ をたして．
$$9-\sqrt{3}+1 < \sum_{k=1}^{40} b_k < \sqrt{79}$$
$8 < 10-\sqrt{3}$，$\sqrt{79} < 9$ より
$$8 < \sum_{k=1}^{40} b_k < 9$$ ∎