

2015年 第2問

 数理
石井K

 2 整数 a, b は $0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 3$ を満たし,

$$2a \sin(bx + a\pi) \sin bx - \cos 2bx + 1 = 0$$

 がすべての実数 x について成り立っている. このような a, b の組 (a, b) をすべて求めよ.
(i) $b \neq 0$ のとき.
 $x = \frac{\pi}{2b}$ を代入しても成り立つことから,

$$2a \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\pi\right) \sin \frac{\pi}{2} - \cos \pi + 1 = 0$$

$$\therefore 2a \cos a\pi + 2 = 0$$

$$\therefore a \cos a\pi = -1$$

これをみたすのは, $a = 1$ 逆に, $a = 1$ のとき.

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 2 \sin(bx + \pi) \sin bx - \cos 2bx + 1 \\ &= -2 \sin^2 bx - (1 - 2 \sin^2 bx) + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, $b = 1, 2, 3$ について成り立つ(ii) $b = 0$ のとき.

等式は常に成り立つ

(i), (ii) より

$$\underline{(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)}$$