0002087182197999

和歌山大学

2015年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 正六角形ABCDEFにおいて，辺BCの中点をG，辺DEを $t:(1-t)$ に内分する点をHとする．ただし，$0<t<1$ である．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{AH}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

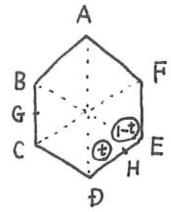
(2) 直線CFと直線GHの交点をIとするとき，GI : IH を求めよ．

(3) さらに，直線AIと直線CDの交点をJとする．点Jが線分CDを1 : 2に内分するとき，t の値を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$ //

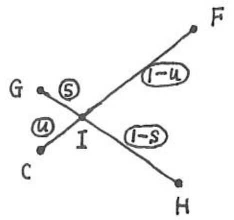
$\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ //

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=\vec{a}+2\vec{b}+(1-t)\vec{a}=(2-t)\vec{a}+2\vec{b}$ //



(2) $GI:IH=s:1-s\ (0<s<1)$,

$CI:IF=u:1-u\ (0<u<1)$ とおくと.

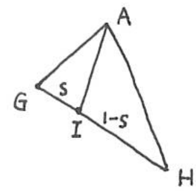


$\triangle AGH$ について考えると,

$\overrightarrow{AI}=(1-s)\overrightarrow{AG}+s\overrightarrow{AH}$

$=(1-s)\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+s\left\{(2-t)\vec{a}+2\vec{b}\right\}$

$=\left(\frac{1}{2}s-st+\frac{3}{2}\right)\vec{a}+\left(\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}\right)\vec{b}\quad\cdots①$



$\triangle ACF$ について考えると,

$\overrightarrow{AI}=(1-u)\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AF}$

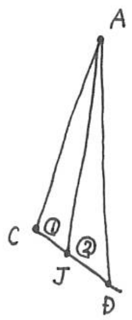
$=(1-u)\cdot(2\vec{a}+\vec{b})+u\vec{b}$

$=2(1-u)\vec{a}+\vec{b}\quad\cdots②$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立より. ①,②の係数を比較して.

$$\begin{cases}\frac{1}{2}s-st+\frac{3}{2}=2(1-u)\\ \frac{3}{2}s+\frac{1}{2}=1\end{cases}$$

$\therefore s=\frac{1}{3}$　また, このとき. $u=\frac{t+1}{6}$　$\therefore GI:IH=1:2$ //



(3) $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(2\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AI}$ と表せるので (kは実数)

$2\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}=k\left(\frac{5-t}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)$　$\therefore t=\frac{1}{2}$ //