0002139090687999

和歌山県立医科大学

2015年 医学部 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とし，a，b，c は実数とする．$y = f(x)$ によって表される曲線を C とおく．C は x 軸と点 $(-1,\ 0)$ でのみ交わるとする．さらに，C の接線で傾きが -1 のものがただ一つ存在するとし，それを ℓ とする．

(1) $f'(-1) > 0$ となることを示せ．

(2) a の値の範囲を求めよ．

(3) C と ℓ の接点の x 座標が1であるとき，C と ℓ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) C が $(-1,0)$ を通ることより，$0 = -1 + a - b + c$　　$\therefore c = -a + b + 1$

$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a + b + 1$

$\quad = (x+1)\{x^2 + (a-1)x - a + b + 1\}$

$g(x) = x^2 + (a-1)x - a + b + 1$ とおいて $g(x)$ の判別式を D とする

$f(x) = 0$ の解が $x = -1$ のみであることから，$g(x) = 0$ が $x = -1$ を重解にもつ または $D < 0$

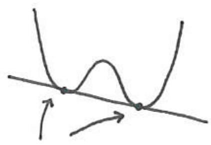
すなわち，$a = b = 3$ または，$D = (a-1)^2 - 4(-a+b+1) = a^2 + 2a - 4b - 3 < 0$　$\cdots①$

ここで $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ と傾きが -1 の接線がただ一つ存在することから，

$3x^2 + 2ax + b + 1 = 0$ の判別式を D' とすると，$D' = 0$

（3次関数のグラフにおいては，グラフ上の異なる2点におけるそれぞれの接線は異なることを利用した．右の図の例のように，一般に4次以上では成り立たない．）

$\therefore D'/4 = a^2 - 3(b+1) = 0$　　$\therefore b = \dfrac{a^2}{3} - 1$　$\cdots②$



① の $a = b = 3$ は ② をみたさないので不適．

よって，常に $a^2 + 2a - 4b - 3 < 0$　$\therefore b > \dfrac{1}{4}(a^2 + 2a - 3)$　$\cdots①'$

$f'(-1) = 3 - 2a + b > 3 - 2a + \dfrac{1}{4}(a^2 + 2a - 3) = \dfrac{1}{4}(a-3)^2 \geqq 0$

よって，$f'(-1) > 0$ が成り立つ　▨

(2) (1)の①'と②より，$\dfrac{a^2}{3} - 1 > \dfrac{1}{4}(a^2 + 2a - 3) \iff a^2 - 6a - 3 > 0$

よって，$\underline{a < 3 - 2\sqrt{3},\ 3 + 2\sqrt{3} < a}$ //

2枚目へつづく

2015年 医学部 第1問 2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とし，a, b, c は実数とする．$y = f(x)$ によって表される曲線を C とおく．C は x 軸と点 $(-1,\ 0)$ でのみ交わるとする．さらに，C の接線で傾きが -1 のものがただ一つ存在するとし，それを ℓ とする．

(1) $f'(-1) > 0$ となることを示せ．

(2) a の値の範囲を求めよ．

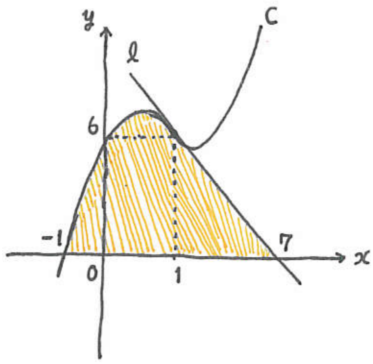
(3) C と ℓ の接点の x 座標が 1 であるとき，C と ℓ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = -1$

に (1) の ② を代入すると，$3x^2 + 2ax + \frac{a^2}{3} = 0$ $\therefore 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 = 0$

よって，$x = -\frac{a}{3}$ これが 1 であるから，$a = -3$ このとき，$b = 2$，$c = 6$

右のグラフより，求める面積 S は $\ell : y = -(x-1)+6$ に注意して，



$$S = \int_{-1}^{1} \underset{奇}{x^3} - \underset{偶}{3x^2} + \underset{奇}{2x} + \underset{偶}{6}\, dx + \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 6$$

$$= 2\int_{0}^{1} -3x^2 + 6\, dx + 18$$

$$= 2\left[-x^3 + 6x\right]_0^1 + 18$$

$$= \underline{28}$$