



2014年 理学部・工学部 第5問

5 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし, t は実数とする. A は, $A^3 = E$ を満たす 2 次の正方行列とする.

- (1) $(A - tE)(A^2 + tA + t^2E)$ を t と E を用いて表せ.
- (2) $t \neq 1$ のとき $A - tE$ は逆行列をもつことを示せ.
- (3) 次の 3 つの命題を証明せよ.
 - (i) $A = E$ ならば, $A^2 + A + E \neq O$ である.
 - (ii) $A^2 + A + E \neq O$ ならば, $A - E$ は逆行列をもたない.
 - (iii) $A - E$ が逆行列をもたないならば, $A = E$ である.