



2016年教育・薬学部第4問

4 関数  $f(x) = xe^x$  で定まる曲線  $C: y = f(x)$  を考える.  $p$  を正の数とする. 以下の問いに答えよ.

(1)  $f'(x)$  と  $f''(x)$  を求めよ. また, すべての  $x$  について

$$\{(ax + b)e^x\}' = f(x)$$

が成り立つような定数  $a, b$  の値を求めよ.

(2) 曲線  $C$  上の点  $P(p, f(p))$  における  $C$  の接線を  $l: y = c(x - p) + d$  とする.  $c$  と  $d$  の値を  $p$  を用いて表せ. さらに, 区間  $x \geq 0$  において関数  $g(x) = f(x) - \{c(x - p) + d\}$  の増減を調べ, 不等式

$$f(x) \geq c(x - p) + d \quad (x \geq 0)$$

が成り立つことを示せ.

(3)  $x \geq 0$  の範囲で, 曲線  $C$  と接線  $l$ , および  $y$  軸で囲まれた図形を  $F$  とする. その面積  $S(p)$  を求めよ.

(4) 2辺が  $x$  軸,  $y$  軸に平行な長方形  $R$  を考える.  $R$  が図形  $F$  を囲んでいるとき,  $R$  の面積の最小値  $T(p)$  を求めよ. さらに,  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S(p)}{T(p)}$  を求めよ.