

2014年医学部第4問

4 関数 $f(x)$ は導関数 $f'(x)$ および第2次導関数 $f''(x)$ をもち、区間 $0 \leq x \leq 1$ において、

$$f(x) > 0, \quad \{f'(x)\}^2 \leq f(x)f''(x) \leq 2\{f'(x)\}^2$$

を満たしている。 $f(0) = a$, $f(1) = b$ とするとき、次の不等式を示せ。

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{a+b}{2}$

(2) $f\left(\frac{1}{3}\right) \leq \sqrt[3]{a^2b}$

(3) $f\left(\frac{1}{4}\right) \geq \frac{4ab}{a+3b}$

(4) $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{1}{4}b$