

2014年 環境科学部・工学部 第3問

3 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d は実数とする) に対して, 2次方程式 $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ は相異なる2つの実数解 α, β をもつとする. いま,

$$P = \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta E), \quad Q = \frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha E)$$

とおく. ただし, E は2次の単位行列である.

- (1) $PQ = QP = O$ が成り立つことを示せ. ただし, O は2次の零行列である.
- (2) $P + Q = E$, $P^2 = P$ および $Q^2 = Q$ が成り立つことを示せ.
- (3) $A = \alpha P + \beta Q$ が成り立つことを示せ.
- (4) $A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)が成り立つことを示せ.