早稲田大学

2014年 第2問　1枚目／2枚　数理 石井K

$\boxed{2}$ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ を満たす θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ に対し，$a_n = 5^n \sin n\theta$ とおく（$n = 1,\ 2,\ \cdots$）．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は，ある整数 A，B を用いて

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$$

と表される．このとき，A，B の値を求めよ．

(2) a_n は5で割ると4余る整数であることを証明せよ．

(3) θ は円周率 π の有理数倍ではないことを証明せよ．

(1) $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n \iff 5^{n+2}\sin(n+2)\theta = A\cdot 5^{n+1}\sin(n+1)\theta + B\cdot 5^n \sin n\theta \cdots (*)$

ここで，$\sin(n+2)\theta = \sin n\theta\cos 2\theta + \cos n\theta \sin 2\theta$

$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta$

また，$\sin\theta = \frac{4}{5}$，$\cos\theta = \frac{3}{5}$，$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{24}{25}$，$\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ より

$\sin(n+2)\theta = -\frac{7}{25}\sin n\theta + \frac{24}{25}\cos n\theta$，$\sin(n+1)\theta = \frac{3}{5}\sin n\theta + \frac{4}{5}\cos n\theta$

となり，$(*)$ に代入すると，

$$5^n\{-7\sin n\theta + 24\cos n\theta - A(3\sin n\theta + 4\cos n\theta) - B\sin n\theta\} = 0$$

$$\therefore\ 5^n\{-(7+3A+B)\sin n\theta + (24-4A)\cos n\theta\} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 7+3A+B=0 \\ 24-4A=0 \end{cases} \iff \underline{A=6,\ B=-25}\ //$$

(2) (1)より，$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 25a_n$

また，$a_1 = 5\sin\theta = 4$，$a_2 = 25\sin 2\theta = 24$ より，帰納的に a_n は整数になる

$a_{n+2} = a_{n+1} + 5(a_{n+1} - 5a_n)$ より　$n \geqq 2$ のとき a_{n+1} と a_n の5で割った余りは等しい

$\therefore$ a_n を5で割った余りは a_2 を5で割った余り 4 に等しい

$n=1$ のときも a_1 を5で割ると4余ることから，a_n $(n=1,2,\cdots)$ を5で割ると4余る ■

早稲田大学

2014年 第2問　　2枚目／2枚

$\boxed{2}$ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ を満たす θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ に対し，$a_n = 5^n \sin n\theta$ とおく（$n = 1,\ 2,\ \cdots$）．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は，ある整数 A，B を用いて

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$$

と表される．このとき，A，B の値を求めよ．

(2) a_n は5で割ると4余る整数であることを証明せよ．

(3) θ は円周率 π の有理数倍ではないことを証明せよ．

(3) θ が π の有理数倍であると仮定して背理法で示す．

$\theta = \frac{q}{p}\pi$ （p, q は整数とする，ただし $p > 0$，$q > 0$ とする）

このとき．$a_p = 5^p \sin q\pi$

q：整数より $\sin q\pi = 0$

$\therefore a_p = 0$ となるが，これは a_n を5で割ると4余ることに矛盾する

$\therefore$ θ は π の有理数倍ではない ■