2013年 人間科学学部（理系） 第4問

4 直線 $x+y=1$ に接する楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

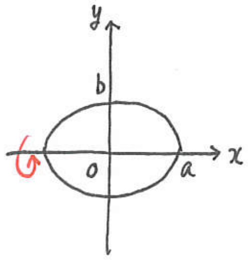
を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V とする．

$a^2=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\ 1}{\boxed{\text{ニ}}\ 3}$，$b^2=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}\ 2}{\boxed{\text{ニ}}\ 3}$ のとき，V は最大値 $\dfrac{\overset{8}{\boxed{\text{ハ}}}\sqrt{3}\pi}{\underset{27}{\boxed{\text{ノ}}}}$ をとる．

楕円と $x+y=1$ が接するので，次の2次方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(1-x)^2}{b^2}=1 \iff (a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2-a^2b^2=0$$

は，重解をもつ．判別式を D とおくと，



$$D/4 = a^4-(a^2+b^2)(a^2-a^2b^2)=0$$

$$\therefore\ a^2b^2(a^2+b^2-1)=0$$

$a>0,\ b>0$ より，$a^2+b^2=1$ …①

$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx$$

$$=2\pi\int_0^a b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\,dx$$

$$=2\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{3a^2}x^3\right]_0^a$$

$$=2\pi\left(ab^2-\frac{ab^2}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$V'(a)$		$+$	0	$-$	
$V(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

① より，$V=\frac{4}{3}\pi a(1-a^2)\quad(0<a<1)$

これを a の関数とみると，$V'(a)=\frac{4}{3}\pi(1-3a^2)$

増減表より，$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ すなわち $\underline{a^2=\frac{1}{3},\ b^2=\frac{2}{3}}$ // のとき 最大値 $V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\underline{\frac{8\sqrt{3}}{27}\pi}$ //