早稲田大学

2016年 人間科学学部（文系） 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 2点O(0, 0, 0)，P$(p,\ q,\ r)$を通る直線を ℓ とする．ただし $p^2+q^2+r^2=1$ とする．直線 ℓ に4点

A(1, 1, −1)，　B(1, −1, 1)，　C(−1, 1, 1)，　D(−1, −1, −1)

から，それぞれ垂線AA′，BB′，CC′，DD′を下ろすとき

$(\mathrm{OA}')^2=(p+\boxed{\text{ヌ}}\,q+\boxed{\text{ネ}}\,r)^2$

1　　−1

であり

$(\mathrm{OA}')^2+(\mathrm{OB}')^2+(\mathrm{OC}')^2+(\mathrm{OD}')^2=\boxed{\text{ノ}}$　4

である．

A′は直線OP上の点より，A′$(sp,\ sq,\ sr)$と表せる

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AA'}}=0$ なので

$p(sp-1)+q(sq-1)+r(sr+1)=0$

$\therefore\ s(p^2+q^2+r^2)-p-q+r=0$　　$\therefore\ s=p+q-r$

$\therefore\ (\mathrm{OA'})^2=s^2(p^2+q^2+r^2)=\underline{(p+q-r)^2}$ //

同様にして，$(\mathrm{OB'})^2=(p-q+r)^2$，$(\mathrm{OC'})^2=(-p+q+r)^2$，$(\mathrm{OD'})^2=(-p-q-r)^2$

$\therefore\ (\mathrm{OA'})^2+(\mathrm{OB'})^2+(\mathrm{OC'})^2+(\mathrm{OD'})^2=(p+q-r)^2+(p-q+r)^2+(-p+q+r)^2+(-p-q-r)^2$

$=(p+q-r)^2+(p+q+r)^2+(p-q+r)^2+(p-q-r)^2$

$=2(p+q)^2+2r^2+2(p-q)^2+2r^2$

$=4p^2+4q^2+4r^2$

$=\underline{4}$ //