2016年 社会科学学部 第1問

数理 石井K

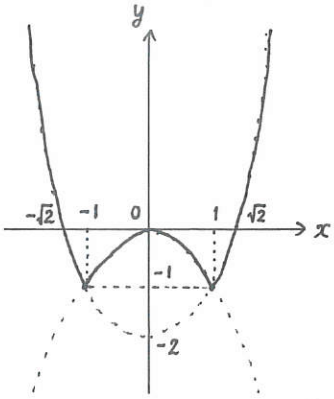
$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=|x^2-1|-1$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の最小値，およびそのときの x の値を求めよ．また，曲線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の座標を求めよ．

(2) 不等式 $|x^2-1|<\dfrac{1}{2}$ を解け．

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

(4) 曲線 $y=f(x)$ と接線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．



(1) (i) $-1\leqq x\leqq 1$ のとき

$f(x)=1-x^2-1=-x^2$

(ii) $x<-1,\ 1<x$ のとき

$f(x)=x^2-1-1=x^2-2$

(i), (ii) より，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる．

よって，$f(x)$ の最小値は -1 ($x=\pm 1$ のとき)，x 軸との共有点は $(0,0)$, $(\pm\sqrt{2},0)$ //

(2) (i) $-1\leqq x\leqq 1$ のとき

$1-x^2<\dfrac{1}{2}$ より，$x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<x$

場合分けの条件とあわせて．$-1\leqq x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leqq 1$

(ii) $x<-1,\ 1<x$ のとき

$x^2-1<\dfrac{1}{2}$ より，$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

場合分けの条件とあわせて，$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<x<-1,\ 1<x<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(i), (ii) より，$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ //

(3) $y=-x^2$ とおくと，ℓ はこの放物線の $\left(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2})\right)$ での接線である．

$y'=-2x$，$f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$ より，$\ell: y=-(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}$　　$\therefore\ \ell: y=-x+\frac{1}{4}$ //

(4) $y=x^2-2$ と ℓ の交点の x 座標を求めると，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$．これを α,β $(\alpha<\beta)$ とおく

$$S=\int_\alpha^\beta -x+\frac{1}{4}-(x^2-2)\,dx-2\int_{-1}^{1}-x^2-(-1)\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx-2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-2\cdot\frac{4}{3}$$

$\frac{1}{6}$公式

$$=\frac{1}{6}(\sqrt{10})^3-\frac{8}{3}$$

$$=\frac{5\sqrt{10}-8}{3}$$ //