

2017年 基幹理工・創造理工・先進理工 第4問

4 n を正の整数とする。試行の結果に応じて k 点 ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) が与えられるゲームがある。ここで k 点を獲得する確率は、ある $t > 0$ によって決まっており、これを $p_k(t)$ とする。このとき、確率 $p_k(t)$ は $a \geq 0$ に対して以下の関係式を満足するという。

$$p_0(t) = t^n, \quad p_k(t) = a \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot p_{k-1}(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

次の問に答えよ。

- (1) $\sum_{k=0}^n p_k(t)$ の値を求めよ。
- (2) a を t を用いて表せ。
- (3) 各 k に対して、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $p_k(t)$ を最大にするような t の値 T_k を求めよ。ただし、 $p_k(0) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), $p_n(0) = 1$ と定める。
- (4) $0 < t < 1$ なる t を与えたとき、(3) で求めた T_k に対して、

$$E = \sum_{k=0}^n T_k \cdot p_k(t)$$

とする。 E の値を求めよ。