



2014年第3問

 数理
石井K

3 次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする. $\sin \theta = \frac{3}{4}$ のとき, $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ. また, $\sin 8\theta$ の値を求めよ.
 (2) $t = \cos \theta$ とおく. 関数 $y = -\frac{8}{9} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{4}{9} \sin^2 \theta + \frac{1}{2}$ を t の関数として表せ.
 (3) (2) の関数 y の $0 \leq \theta < 2\pi$ における最大値と最小値を求めよ. また, そのときの θ の値を求めよ.

$$(1) 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき. } 0 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos^2 \theta &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\sin 8\theta = 2 \sin 4\theta \cdot \cos 4\theta$$

$$= 4 \sin 2\theta \cos 2\theta \cdot (2 \cos^2 2\theta - 1)$$

$$= 8 \sin \theta \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) \cdot \{2(2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 1\}$$

$$= 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{7}{16} - 1\right) \cdot \{2 \cdot \left(2 \cdot \frac{7}{16} - 1\right)^2 - 1\}$$

$$= \frac{93\sqrt{7}}{512}$$

$$(2) y = -\frac{8}{9} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2} - \frac{4}{9} (1 - \cos^2 \theta) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{9} t^2 + \frac{4}{9} t - \frac{7}{18}$$

$$(3) y = \frac{4}{9} \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$\therefore \begin{cases} \text{最大値 } \frac{1}{2} (\theta = 0) \\ \text{最小値 } -\frac{1}{2} (\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\text{最小値 } -\frac{1}{2} (\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})}}}$$

$$t = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$$

$$t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

