



2014年 第2問

2 次の問いに答えよ.

(1) $\cos x + \cos y \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y に対して等式

$$\tan \frac{x+y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $\cos x + \cos y + \cos z \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して等式

$$\tan \frac{x+y+z}{3} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$$

は成り立つか. 成り立つときは証明し, 成り立たないときは反例を挙げよ.

和 \leftrightarrow 積の公式より

$$(1) \text{ (右辺)} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \tan \frac{x+y}{2} = \text{ (左辺)} \quad \square$$

$$(2) x = y = \frac{\pi}{4}, z = \frac{\pi}{2} \text{ を代入すると.}$$

$$\text{ (左辺)} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} (> 1.73)$$

$$\text{ (右辺)} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2}}{2 \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$< \frac{2 + 1.42}{2}$$

$$= 1.71$$

\therefore (左辺) \neq (右辺) となり 成り立たない (反例は $x = y = \frac{\pi}{4}, z = \frac{\pi}{2}$ のとき)

□

最低限 加法定理から
作れるようにして
おう!

大事

和 \leftrightarrow 積の公式

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

無理数を含んでいるので

念のため, 大小により

異分子=とを確かめた.