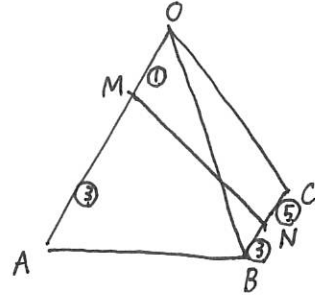


2015年医学部第14問

14 1辺の長さが $\sqrt{15}$ である正四面体OABCについて考える. 辺OAを1:3に内分する点をM, 辺BCを3:5に内分する点をNとする. $|\overrightarrow{MN}| = m$ としたとき, $\frac{64m^2}{185}$ の値を求めよ.



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OC} \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OC}$$

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{15},$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{15}{2} \quad \text{より}$$

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{15}{16} + \frac{25}{64} \cdot 15 + \frac{9}{64} \cdot 15 - \frac{5}{32} \cdot \frac{15}{2} \cdot 2 - \frac{3}{32} \cdot \frac{15}{2} \cdot 2 + \frac{15}{64} \cdot \frac{15}{2} \cdot 2$$

$$= \frac{60 + 375 + 135 - 150 - 90 + 225}{64}$$

$$= \frac{555}{64}$$

$$\therefore \frac{64m^2}{185} = \frac{64}{185} \cdot \frac{555}{64}$$

$$= \underline{\underline{3}}$$