0001966093308999

愛媛大学

2014 年 理学部・工学部 第 2 問

数理 石井K

2 次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して

$$f(x)=\sin\pi x+\int_0^1 tf(t)\,dt$$

が成り立つような関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3}{\tan\theta-\sin\theta}$$

(3) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

(4) 関数 $f(x)=|x|(e^x+a)$ は $x=0$ において微分可能であるとする．このとき，定数 a の値を求めよ．

(1) $a=\int_0^1 tf(t)\,dt$ とおくと．

$f(x)=\sin\pi x+a$

$\therefore\ a=\int_0^1 t\sin\pi t+at\,dt$

$=\int_0^1 t\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)'dt+\left[\frac{1}{2}at^2\right]_0^1$

$=\left[-\frac{t}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{\pi}\cos\pi t\,dt+\frac{1}{2}a$

$=\frac{1}{\pi}+\left[\frac{1}{\pi^2}\sin\pi t\right]_0^1+\frac{1}{2}a$

$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}a$

よって $\frac{1}{2}a=\frac{1}{\pi}$ $\therefore a=\frac{2}{\pi}$ $\therefore\ \underline{f(x)=\sin\pi x+\frac{2}{\pi}}$

(2) (与式) $=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3\cos\theta}{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}$

$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\frac{1}{2}\theta\cos\theta}{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{2\cos\theta}{1}$

$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を使う

$=\underline{2}$

(3) (与式) $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$ 区分求積法より

$=\left[\log(1+x)\right]_0^1$

$=\underline{\log 2}$

(4) $f(0)=0$ であるから

$\lim_{h\to +0}\frac{|h|(e^h+a)-0}{h}=a+1$

$\lim_{h\to -0}\frac{|h|(e^h+a)-0}{h}=-a-1$

$\therefore\ a+1=-a-1$ となるのは

$\underline{a=-1}$