

2014年薬学部第2問

2 次の各設問に答えよ。

(1) $\sin x - \sin y = \frac{1}{2}$, $\cos x - \cos y = \frac{1}{3}$ のとき, $\cos(x-y)$ の値は $\frac{\text{アイ}}{\text{ウエ}}$ であり, $\cos(x+y)$ の値は $\frac{\text{オ}}{\text{カキ}}$ である.

(2) 数列 $\{a_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) は, 第11項が20で

$$a_{n+1} = a_n - \frac{2}{3} \int_{a_n}^{a_{n+1}} (x - a_n)(x - a_{n+1}) dx$$

と

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$

を満たすものとする. 初項は $\frac{50}{クケ}$ であり, 数列の和 $\sum_{k=1}^n a_k$ は, $n = \frac{17}{コサ}$ のとき, 最大値 $\frac{442}{シスセ}$ をとる.

(1) $\sin x - \sin y = \frac{1}{2}$ の両辺を2乗して, $\sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y = \frac{1}{4}$
 $\cos x - \cos y = \frac{1}{3}$ " $\cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y = \frac{1}{9}$
 これらの両辺を1にして整理すると, $\cos(x-y) = \frac{59}{72}$

上式から下式を引いて整理すると, $-\cos 2x + 2\cos(x+y) - \cos 2y = \frac{5}{36}$

\therefore 和・積の公式から, $-2\cos(x+y)\cos(x-y) + 2\cos(x+y) = \frac{5}{36}$

$\therefore \cos(x+y) = \frac{5}{13}$

(2) $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (a_n - a_{n+1})^3$

$\therefore (a_{n+1} - a_n) \left\{ 1 - \frac{1}{9}(a_{n+1} - a_n)^2 \right\} = 0$

$\therefore a_n > a_{n+1}$ より,

$a_{n+1} - a_n = -3$

$\therefore a_{n+1} = a_n - 3$

これは公差 -3 の等差数列

$a_{11} =$
 $\therefore a + 10d = 20 \quad \therefore d = -3$
 代入して, $a = 50$

$\sum_{k=1}^n -3k + 53 = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{103}{2}n$
 $= -\frac{3}{2}\left(n - \frac{103}{6}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{103}{6}\right)^2$

$\therefore n = 17$ のとき

最大値 442 をとる

