0002075184297999

群馬大学

2015年 理工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ を単位ベクトルとし，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{d}=-\vec{a}+2\vec{b}$ とおく．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とし，$x=\cos\theta$ とおく．

(1) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ の大きさを x を用いて表せ．

(2) 内積 $\vec{c}\cdot\vec{d}$ を x を用いて表せ．

(3) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角も θ に等しいとき，θ を求めよ．

(1) $|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$=2+2x$

$\therefore\ \underline{|\vec{c}|=\sqrt{2+2x}}$ //

$\vec{a}$, $\vec{b}$：単位ベクトルなので，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$=x$

同様に，$|\vec{d}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=5-4x$

$\therefore\ \underline{|\vec{d}|=\sqrt{5-4x}}$ //

(2) $\vec{c}\cdot\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+2\vec{b})$

$=-|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2$

$=\underline{1+x}$ //

(3) $\cos\theta=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|}$ を x で表すと，$x=\dfrac{1+x}{\sqrt{2+2x}\cdot\sqrt{5-4x}}$

右辺は0以上より，$x\geqq 0$ …①

両辺を2乗して，$x^2=\dfrac{(x+1)^2}{(2+2x)(5-4x)}$

$\therefore\ x^2(10+2x-8x^2)=x^2+2x+1$

$\therefore\ 8x^4-2x^3-9x^2+2x+1=0$

因数定理．

$\therefore\ (2x-1)(x+1)(x-1)(4x+1)=0$

①と $0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$0\leqq x<1$ なので，$x=\dfrac{1}{2}$　$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となり $\underline{\theta=60^\circ}$ //