

2013年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第5問

5 2次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して、 $\Delta(A) = ad - bc$  とおく。たとえば単位行列  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  に対しては  $\Delta(E) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$  となる。また  $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$  に対しては  $\Delta(K) = 2 \times 7 - 3 \times 5 = -1$  となる。次の各問いに答えよ。

- (1)  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  に対して  $R = PQ$  とおく。  $\Delta(P)$ ,  $\Delta(Q)$ ,  $\Delta(R)$  を計算し、  $\Delta(R) = \Delta(P)\Delta(Q)$  が成り立つことを確かめよ。
- (2) すべての2次の正方行列  $A$ ,  $B$  に対して、  $C = AB$  とおくと  $\Delta(C) = \Delta(A)\Delta(B)$  が成り立つことを示せ。
- (3)  $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  となる2次の正方行列  $X$  ですべての成分が実数であるようなものは存在しないことを示せ。
- (4) 2次の正方行列  $A$  に逆行列  $B$  が存在したとする。  $A$  と  $B$  の成分がすべて整数ならば、  $\Delta(A)$  は1か-1のどちらかである。このことを示せ。