

2015年 経済 第2問

2  $xy$  平面上の原点  $O$  と 3 次関数  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$  と 1 次関数  $g(x) = 3ax$  を考える. ただし,  $a$  は定数である. また, 関数  $y = f(x)$  のグラフで  $x \geq 0$  を満たす部分を曲線  $C$  とする. 曲線  $y = f(x)$  上の点を  $P(p, f(p))$  とし, 点  $P$  における曲線  $y = f(x)$  の接線を  $l$  とする. ただし,  $p \geq 0$  を満たす. 以下の問題に答えよ.

- (1) 関数  $f(x)$  が単調に増加することを示せ.
- (2) 直線  $l$  の傾きが最小となるとき,  $p$  の値と直線  $l$  の式を求めよ.
- (3) 関数  $y = g(x)$  のグラフが曲線  $C$  と異なる 3 点で交わるとき,  $a$  の値の範囲を求めよ.
- (4)  $a$  の値は (3) で求めた範囲を満たすとす.  $x \geq 0$  の範囲で関数  $f(x) - g(x)$  が最小となるとき,  $x$  を  $a$  を用いて表せ.
- (5) 点  $P$  が原点  $O$  と一致する場合に, 接線  $l$  が曲線  $C$  と原点以外で交わる点を  $Q$  とおき, 曲線  $C$  上において原点  $O$  と点  $Q$  の間に点  $R$  をとる.  $\triangle ORQ$  の面積が最大となるとき, 点  $R$  の座標と  $\triangle ORQ$  の面積を求めよ.