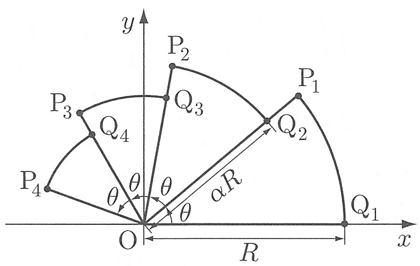
2017年 工学部 第1問

1 xy 平面上の座標 $(R,\ 0)$ の点を Q_1 とする．各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して以下の規則で点 $\mathrm{Q}_2,\ \mathrm{Q}_3,\ \cdots$，点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots$ を定める．

原点Oを中心に点 Q_n を反時計回りに角度 θ（ラジアン）回転させた点を P_n とし，線分 OP_n を $\alpha:(1-\alpha)$ に内分する点を Q_{n+1} とする．

ただし，$R>0,\ 0<\alpha<1$ とする．扇形 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{P}_n$ の面積を S_n とし，円周率は π とする．以下の問いに答えよ．



(1) S_1 を $R,\ \theta$ を用いて表せ．

(2) S_n を $R,\ \theta,\ n,\ \alpha$ を用いて表せ．

(3) $W_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$ とおく．W_n を $R,\ \theta,\ n,\ \alpha$ を用いて表せ．

(4) 数列 $\{W_n\}$ の極限値 $W=\lim_{n\to\infty}W_n$ を $R,\ \theta,\ \alpha$ を用いて表せ．

(5) 弧 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n$ の長さを a_n，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ の長さを b_n とし，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3+\cdots+a_n+b_n+\cdots$$

の和を T とする．$T=2R$ かつ (4) で求めた W が $W=2S_1$ となる α と θ を求めよ．