2012年 農・教育文化（文系）第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{1}{3},\quad a_{n+1} = \frac{1}{3-2a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められているとき，次の各問に答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

(2) 一般項 a_n を予想し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(1) $a_2 = \dfrac{1}{3-2a_1} = \dfrac{1}{3-\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{7}$

$a_3 = \dfrac{1}{3-2a_2} = \dfrac{1}{3-\frac{6}{7}} = \dfrac{7}{15}$

$a_4 = \dfrac{1}{3-2a_3} = \dfrac{1}{3-\frac{14}{15}} = \dfrac{15}{31}$

以上より，$\underline{a_2 = \dfrac{3}{7},\ a_3 = \dfrac{7}{15},\ a_4 = \dfrac{15}{31}}$ //

(2) (1)より，$a_n = \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$ と類推できる．これを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．

$a_1 = \dfrac{2^1-1}{2^2-1} = \dfrac{1}{3}$ ∴ $n=1$ のとき．成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

$$a_k = \frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}$$

$$\therefore\ a_{k+1} = \frac{1}{3-2\cdot\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}} = \frac{2^{k+1}-1}{3(2^{k+1}-1)-2(2^k-1)} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{(k+1)+1}-1}$$

↑ 分子・分母に $(2^{k+1}-1)$ をかけた．

∴ $n=k+1$ のとき．成り立つ．

(i)，(ii)より，$a_n = \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$ が成り立つ ▨