

2013年 数学科・物理学科（共通問題）第3問

3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad a_{n+3} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 2a_n$ を示せ.

(2) $a_n \leq \sqrt{2^n}$ を示せ.

さらに, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \begin{cases} 0 & a_n \text{ が偶数のとき} \\ 1 & a_n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. また, 自然数 k に対して, 条件

$$p_k : \text{すべての自然数 } n \text{ について } b_{n+k} = b_n \text{ が成り立つ}$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(3) 条件 p_k を満たす最小の自然数 k を求めよ.

(4) p, q, r を整数とし, 数列 $\{a_n\}$ の a_1, a_2, a_3 を $a_1 = p, a_2 = q, a_3 = r$ に置き換え, 数列 $\{b_n\}$ もそれぞれにあわせて置き換える. p, q, r をどのように選んでも, 条件 p_k を満たす自然数 k が存在することを示せ.