0001978451208999

岡山大学

2015年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標空間内に3点A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)をとり，2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$の内積が0になるような点P($x$, y, z)の集合をSとする．3点A，B，Cを通る平面をαとするとき，次の問いに答えよ．

(1) 集合Sは球面であることを示し，その中心Qの座標と半径rの値を求めよ．

(2) 原点Oから最も遠い距離にあるS上の点の座標を求めよ．

(3) (1)で求めた点Qは，平面α上にあることを示せ．

(4) (1)で求めた点Qを通って平面αに垂直な直線をℓとする．球面Sと直線ℓのすべての共有点について，その座標を求めよ．

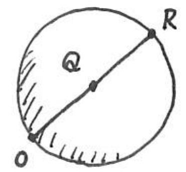
(1) $\overrightarrow{AP}=(x-1, y, z)$, $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=(2x, 2y-1, 2z-1)$

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}) = 2x(x-1)+y(2y-1)+z(2z-1)=0$

$\therefore x^2-x+y^2-\frac{1}{2}y+z^2-\frac{1}{2}z=0 \quad \cdots (*)$

$\therefore (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{4})^2+(z-\frac{1}{4})^2=\frac{3}{8}$

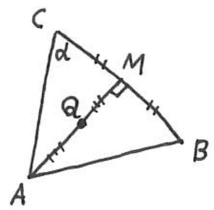
$\therefore$ 中心は Q$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$，半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ //



(2) (1)より，OQ $= r$ となり，球面Sは原点Oを通ることが分かる．

$\therefore$ Oから最も遠い距離にあるS上の点をRとすると，

$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OQ}$ $\therefore$ Rの座標は $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ //



(3) $\overrightarrow{AB}=(-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AQ}=(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ より，

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ $\therefore$ 右図より，点Qは線分BCの中点をMとおいたとき，線分AMの中点に一致する．

すなわち，平面α上にある ▨

(4) $\overrightarrow{PQ}=(\frac{1}{2}-x, \frac{1}{4}-y, \frac{1}{4}-z)$ より，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-y=0$ $\therefore x-y=\frac{1}{4} \cdots ①$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC}=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-z=0$ $\therefore x-z=\frac{1}{4}\cdots ②$

①，②を(*)に代入して，$x^2-x+(x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{4})+(x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{4})=0$

$\therefore 3x^2-3x+\frac{3}{8}=0$ $\therefore x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$ $\therefore (\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{1-\sqrt{2}}{4}, \frac{1-\sqrt{2}}{4})$，$(\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{4})$ //