2012年 理系 第4問

$\boxed{4}$ $f(x)=4x(1-x)$とする．このとき

$$\begin{cases} f_1(x)=f(x), \\ f_{n+1}(x)=f_n(f(x)) \end{cases}$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f_2(x)=0$ を解け．

(2) $0 \leqq t < 1$ を満たす定数 t に対し，方程式 $f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ とする．c が $0 \leqq c < 1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たすとき，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解であることを示せ．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ 範囲での方程式 $f_n(x)=0$ の異なる解の個数を S_n とする．このとき S_{n+1} を S_n で表し，一般項 S_n を求めよ．