

2010年理系第3問

3 正の実数 r と $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して

$$a_0 = r \cos \theta, \quad b_0 = r$$

とおく. $a_n, b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ.
- (2) $\frac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ.
- (3) $\theta \neq 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{r \sin \theta}{\theta}$$

を示せ.