



2013年理学部第3問

3 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について、実数 a, b は次の条件を満たすものとする。

- (A) $\int_0^1 f(x) dx = f(a)$ ($0 < a < 1$),
(B) $f(1) - f(0) = f'(b)$ ($0 < b < 1$)

また、点 $(0, 0)$, (a, e^a) を通る直線を l_1 とし、点 $(1, 0)$, (b, e^b) を通る直線を l_2 とする。

- (1) (A), (B) を利用して、 l_1, l_2 の方程式を a, b を用いずに表せ。
(2) l_1 と l_2 の交点を求めよ。さらに、曲線 $y = e^x$ 上の点 $(1, e)$ における接線と直線 l_2 の交点を求めよ。
(3) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$a < \frac{e-2}{e-1} < b < \frac{1}{2}$$

ただし、必要ならば $e = 2.718\cdots$, $\log(e-1) = 0.541\cdots$ を用いてよい。