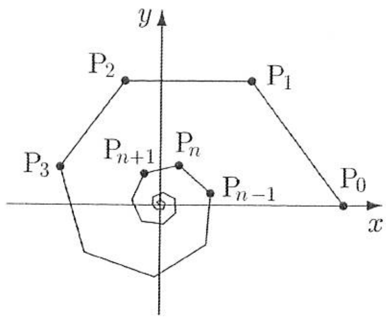
0001832097618999

徳島大学

2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $x_0=1$, $y_0=0$ とする．n が自然数のとき，座標平面上の点 $\mathrm{P}_{n-1}(x_{n-1},\ y_{n-1})$ は行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ の表す1次変換によって点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ に移されるとする．点 P_{n-1} と点 P_n の距離を l_n とする．



(1) l_1 を求めよ．

(2) l_n を x_{n-1}, y_{n-1} の式で表せ．

(3) $\dfrac{l_{n+1}}{l_n}$ の値を求めよ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ の和を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\therefore\ l_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \underline{\frac{5}{6}}$ //

(2) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{n-1}-\frac{2}{3}y_{n-1} \\ \frac{2}{3}x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1} \end{pmatrix}$

$\therefore\ l_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{2}{3}y_{n-1}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}x_{n-1}+\frac{1}{2}y_{n-1}\right)^2}$

$= \underline{\frac{5}{6}\sqrt{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2}}$ //

(3) (2) より．

$\dfrac{l_{n+1}}{l_n} = \dfrac{\frac{5}{6}\mathrm{OP}_n}{\frac{5}{6}\mathrm{OP}_{n-1}} = \dfrac{\mathrm{OP}_n}{\mathrm{OP}_{n-1}}$

ここで，行列は OP_n の長さを $\frac{5}{6}$ 倍にする行列なので

$\dfrac{\mathrm{OP}_n}{\mathrm{OP}_{n-1}} = \dfrac{5}{6}$ $\therefore\ \dfrac{l_{n+1}}{l_n} = \underline{\dfrac{5}{6}}$ //

(4) (3) より $\{l_n\}$ は初項 $l_1=\frac{5}{6}$，公比 $\frac{5}{6}$ の数列なので

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \dfrac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = \underline{5}$ //