



2011年理系第2問

2 実数  $x$  の小数部分を,  $0 \leq y < 1$  かつ  $x - y$  が整数となる実数  $y$  のこととし, これを記号  $\langle x \rangle$  で表す. 実数  $a$  に対して, 無限数列  $\{a_n\}$  の各項  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を次のように順次定める.

(i)  $a_1 = \langle a \rangle$

(ii) 
$$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1)  $a = \sqrt{2}$  のとき, 数列  $\{a_n\}$  を求めよ.

(2) 任意の自然数  $n$  に対して  $a_n = a$  となるような  $\frac{1}{3}$  以上の実数  $a$  をすべて求めよ.

(3)  $a$  が有理数であるとする.  $a$  を整数  $p$  と自然数  $q$  を用いて  $a = \frac{p}{q}$  と表すとき,  $q$  以上のすべての自然数  $n$  に対して,  $a_n = 0$  であることを示せ.