

2012年 海洋科学 第5問

5 空間内に三角形  $ABC$  と定点  $O$  を中心とする半径  $1$  の球面  $S$  とがある。点  $P$  が  $S$  上のすべての点を動くときの  $AP^2 + BP^2 + CP^2$  の最大値, 最小値をそれぞれ  $M, m$  とするとき, 次の問に答えよ。ただし, 三角形  $ABC$  の重心  $G$  は  $OG > 1$  をみたすものとする。

- (1)  $M = AQ^2 + BQ^2 + CQ^2$  となる  $S$  上の点を  $Q$ ,  $m = AR^2 + BR^2 + CR^2$  となる  $S$  上の点を  $R$  とするとき, 3点  $Q, R, G$  は 1 直線上にあることを示せ。
- (2)  $\sqrt{M - (GA^2 + GB^2 + GC^2)} - \sqrt{m - (GA^2 + GB^2 + GC^2)}$  の値は三角形  $ABC$  に無関係に定まることを示し, その値を求めよ。