富山大学

2016年 経済・人間発達科学 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 曲線 $C_1 : y = x^3 - x$ と曲線 $C_2 : y = (x-\alpha)^3 - (x-\alpha) + \beta$ が，ちょうど2つの点を共有しているとする．ただし，α，β は実数である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) α，β が満たす条件を求めよ．

(2) α，β が(1)の条件を満たすとき，点 $(\alpha,\ \beta)$ が存在する領域を図示せよ．

(1) $f(x) = x^3 - x$，$g(x) = (x-\alpha)^3 - (x-\alpha) + \beta$ とおくと，

$f(x) - g(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもてばよい

$f(x) - g(x) = 3\alpha x^2 - 3\alpha^2 x + \alpha^3 - \alpha - \beta$

$\alpha \neq 0$ のとき，これは2次式で判別式を D とすると，

$D = (-3\alpha^2)^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot (\alpha^3 - \alpha - \beta)$

$= 3\alpha(-\alpha^3 + 4\alpha + 4\beta)$

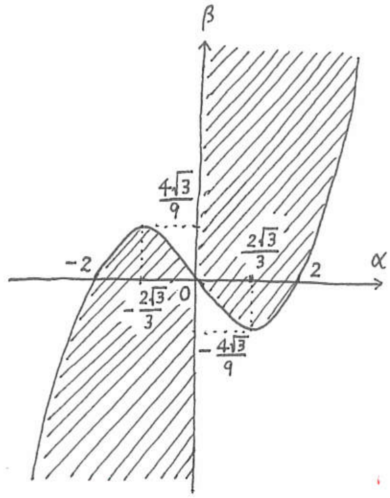
よって，$\left(\alpha > 0 \text{ かつ } \beta > \frac{1}{4}\alpha^3 - \alpha\right)$ または $\left(\alpha < 0 \text{ かつ } \beta < \frac{1}{4}\alpha^3 - \alpha\right)$

$\alpha = 0$ のとき $f(x) - g(x) = -\beta$ よって不適

以上より，$\underline{\left(\alpha > 0 \text{ かつ } \beta > \frac{1}{4}\alpha^3 - \alpha\right) \text{ または } \left(\alpha < 0 \text{ かつ } \beta < \frac{1}{4}\alpha^3 - \alpha\right)}$ //

(2) $h(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$ とおくと，$h'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

x	$\cdots$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$



増減表より求める領域は右図の斜線部分

ただし，境界線は含まない