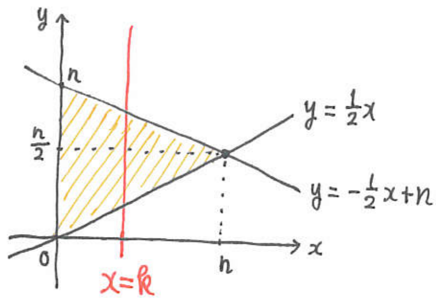
津田塾大学

2015年 学芸（英文）第3問

数理 石井K

3 nを正の偶数とする．次の条件をみたす整数解$(x,\ y)$の個数を求めよ．

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq \frac{1}{2}x \\ y \leqq -\frac{1}{2}x + n \end{cases}$$



$y=\frac{1}{2}x$ と $y=-\frac{1}{2}x+n$ の交点は $(n,\ \frac{1}{2}n)$

よって 与えられた条件を表す領域は右の斜線部分であり．

境界線も含む

kを整数 $(0 \leqq k \leqq n)$ として．$x=k$ 上の整数解を考えると．

(i) $x=k$ (k：偶数) のとき．

$\frac{1}{2}k \leqq y \leqq -\frac{1}{2}k+n$ であり．

求める (x, y) は

$(x, y) = (k,\ \frac{1}{2}k),\ (k,\ \frac{1}{2}k+1),\ \cdots,\ (k,\ -\frac{1}{2}k+n)$

となり 個数は．$-\frac{1}{2}k+n-\frac{1}{2}k+1 = n-k+1$ コ

(ii) $x=k$ (k：奇数) のとき．

$\frac{1}{2}k \leqq y \leqq -\frac{1}{2}k+n$ であり．

$(x, y) = (k,\ \frac{1}{2}k+\frac{1}{2}),\ (k,\ \frac{1}{2}k+\frac{3}{2}),\ \cdots,\ (k,\ -\frac{1}{2}k+n-\frac{1}{2})$

個数は．$-\frac{1}{2}k+n-\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}k+\frac{1}{2})+1 = n-k$ コ

(i)，(ii) と $0 \leqq k \leqq n$ に偶数のkは $\frac{n}{2}+1$ コあることから．

$$\left(\sum_{k=0}^{n} n-k\right) + \frac{n}{2} + 1 = n(n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{n}{2} + 1$$

$$= \underline{\frac{1}{2}n^2 + n + 1 \text{ 個}}$$ //