早稲田大学

2014年 基幹理工・創造理工・先進理工 第4問　1枚目/3枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ を次の積分で定義する.

$$f(x)=\int_x^{x+\log 2}|e^{2t}-e^t-2|\,dt$$

次の問に答えよ.

(1) $g(t)=e^{2t}-e^t-2$ のグラフを描け.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ が極値をとる x を求めよ.

(1) $g'(t)=2e^{2t}-e^t$

$=e^t(2e^t-1)$

$\therefore$ $g'(t)=0$ となるのは, $e^t=\frac{1}{2}$ すなわち $t=-\log 2$

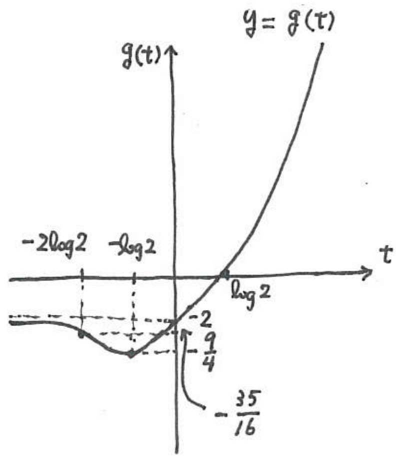
$g''(t)=4e^{2t}-e^t$

$=e^t(4e^t-1)$

$\therefore$ $g''(t)=0$ となるのは, $e^t=\frac{1}{4}$ すなわち $t=-2\log 2$

$\lim_{t\to-\infty} g(t)=-2$, $\lim_{t\to+\infty} g(t)=+\infty$

t	$\cdots$	$-2\log 2$	$\cdots$	$-\log 2$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g''(t)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(t)$	↘	$-\frac{35}{16}$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗



また, $g(t)=0$ となるのは $(e^t-2)(e^t+1)=0$ より. $t=\log 2$ $\therefore$ 上のグラフになる.

(2) (i) $x\leqq 0$ のとき. 区間 $x\leqq t\leqq x+\log 2$ において

$g(t)\leqq 0$ なので

$f(x)=\int_x^{x+\log 2}-e^{2t}+e^t+2\,dt$

$=\left[-\frac{1}{2}e^{2t}+e^t+2t\right]_x^{x+\log 2}$

$=-\frac{1}{2}e^{2x+2\log 2}+e^{x+\log 2}+2x+2\log 2+\frac{1}{2}e^{2x}-e^x-2x$

$=-2e^{2x}+2e^x+2\log 2+\frac{1}{2}e^{2x}-e^x$

$=-\frac{3}{2}e^{2x}+e^x+2\log 2$

0001883456118999

早稲田大学

2014年 基幹理工・創造理工・先進理工 第4問　2枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)$ を次の積分で定義する．

$$f(x)=\int_x^{x+\log 2}|e^{2t}-e^t-2|\,dt$$

次の問に答えよ．

(1) $g(t)=e^{2t}-e^t-2$ のグラフを描け．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ が極値をとる x を求めよ．

(2) のつづき.

(ii) $0<x\leqq\log 2$ のとき.

$$f(x)=\int_x^{\log 2}-e^{2t}+e^t+2\,dt+\int_{\log 2}^{x+\log 2}e^{2t}-e^t-2\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{2t}+e^t+2t\right]_x^{\log 2}+\left[\frac{1}{2}e^{2t}-e^t-2t\right]_{\log 2}^{x+\log 2}$$

$$=-2+2+2\log 2+\frac{1}{2}e^{2x}-e^x-2x+\frac{1}{2}e^{2x+2\log 2}-e^{x+\log 2}-2x-2\log 2$$
$$-2+2+2\log 2$$

$$=\frac{5}{2}e^{2x}-3e^x-4x+2\log 2$$

(iii) $x>\log 2$ のとき.

$$f(x)=\int_x^{x+\log 2}e^{2t}-e^t-2\,dt$$

(i) のときの正負が反対

$$=\frac{3}{2}e^{2x}-e^x-2\log 2$$

(i)〜(iii) より

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}e^{2x}+e^x+2\log 2 & (x\leqq 0 \text{ のとき})\\ \frac{5}{2}e^{2x}-3e^x-4x+2\log 2 & (0<x\leqq\log 2 \text{ のとき})\\ \frac{3}{2}e^{2x}-e^x-2\log 2 & (x>\log 2 \text{ のとき})\end{cases}$$

//

2014年 基幹理工・創造理工・先進理工 第4問　3枚目／3枚

数理 石井K

4 関数 $f(x)$ を次の積分で定義する．

$$f(x)=\int_x^{x+\log 2}|e^{2t}-e^t-2|\,dt$$

次の問に答えよ．

(1) $g(t)=e^{2t}-e^t-2$ のグラフを描け．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ が極値をとる x を求めよ．

(3) (2) より．

$$f'(x)=\begin{cases}-3e^{2x}+e^x=-3e^x\left(e^x-\frac{1}{3}\right) & (x<0)\\ 5e^{2x}-3e^x-4 & (0<x<\log 2)\\ 3e^{2x}-e^x=3e^x\left(e^x-\frac{1}{3}\right)>0 & (x>\log 2)\end{cases}$$

→ $f'(x)=0$ となるのは $x=-\log 3$

→ $f'(x)=0$ となるのは $e^x=\dfrac{3+\sqrt{89}}{10}$

すなわち $x=\log\dfrac{3+\sqrt{89}}{10}$

x	$\cdots$	$-\log 3$	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ただし $\alpha=\log\dfrac{3+\sqrt{89}}{10}$

∴ 増減表より

$x=-\log 3$ のとき極大値，$x=\log\dfrac{3+\sqrt{89}}{10}$ のとき極小値をとる //