2010 年 人間科学学部（理系） 第 5 問

$\boxed{5}$ 四面体 OABC において，線分 OA を 2：1 に内分する点を P，線分 OB を 3：1 に内分する点を Q，線分 BC を 4：1 に内分する点を R とする．この四面体を 3 点 P，Q，R を通る平面で切り，この平面が線分 AC と交わる点を S とするとき，線分の長さの比 AS：SC を求めることを考えよう．

点 S は 3 点 P，Q，R を通る平面上にあるから，定数 s，t，u を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + u\overrightarrow{\mathrm{OR}} \quad (s+t+u=1)$$

と書くことができる．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{\boxed{\text{ス}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \boxed{\text{セ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ それぞれの定数倍の和として表すことができる．そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の係数をそれぞれ定数 s'，t'，u' とおくことにより

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = s'\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u'\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (18s' + 16t' + 11u' = \boxed{\text{タ}})$$

と書くことができる．ところが，点 S は線分 AC 上にあることから，s'，t' u' を求めることができ，AS：SC = $\boxed{\text{チ}}$ ： $\boxed{\text{ツ}}$ であることがわかる．ただし，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ はできる限り小さい自然数で答えること．