東京大学

2014年 文系 第4問

4 r を0以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$a_1 = r$，　$a_2 = r + 1$，　$a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1)$ （$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）

また，素数 p を1つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする．ただし，0を p で割った余りは0とする．

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ．

(2) $r = 2$，$p = 17$ の場合に，10以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ．

(3) ある2つの相異なる自然数 n，m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする．このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ．