

2014年海洋工第2問

2 $a \neq 1$ に対して $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}$ とする.

(1) $E - A$ の逆行列 B を求めよ. ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$E + A + A^2 + \dots + A^n = B(E - A^{n+1})$$

となることを示せ.

(3) $A^n = \begin{pmatrix} -(n-1)a^n & na^{n-1} \\ -na^{n+1} & (n+1)a^n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を数学的帰納法を用いて示せ.

(4) $\sum_{k=1}^n ka^{k-1}$ を求めよ.