2015年 基幹理工・創造理工・先進理工 第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 整数 x, y が $x^2-2y^2=1$ をみたすとき，次の問に答えよ．

(1) 整数 a, b, u, v が $(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=u+v\sqrt{2}$ をみたすとき，u, v を a, b, x, y で表せ．さらに $a^2-2b^2=1$ のときの u^2-2v^2 の値を求めよ．ともに答のみでよい．

(2) $1<x+y\sqrt{2}\leqq 3+2\sqrt{2}$ のとき，$x=3$, $y=2$ となることを示せ．

(3) 自然数 n に対して，$(3+2\sqrt{2})^{n-1}<x+y\sqrt{2}\leqq(3+2\sqrt{2})^n$ のとき，$x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n$ を示せ．

(1) 展開すると．$ax+ay\sqrt{2}+bx\sqrt{2}+2by=u+v\sqrt{2}$

よって．$(ax+2by-u)+\sqrt{2}(ay+bx-v)=0$

$\therefore$ $\underline{u=ax+2by,\ v=ay+bx}$ //

$$\begin{aligned}\therefore\ u^2-2v^2 &= (ax+2by)^2-2(ay+bx)^2\\ &= a^2(x^2-2y^2)-2b^2(x^2-2y^2)\\ &= (a^2-2b^2)(x^2-2y^2)\\ &= \underline{1}\ //\end{aligned}$$

(2) $$x+y\sqrt{2}=\frac{(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})}{x-y\sqrt{2}}=\frac{x^2-2y^2}{x-y\sqrt{2}}=\frac{1}{x-y\sqrt{2}}$$

よって．$1<\dfrac{1}{x-y\sqrt{2}}\leqq 3+2\sqrt{2}$

$\therefore$ $\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}\leqq x-y\sqrt{2}<1$　すなわち．$3-2\sqrt{2}\leqq x-y\sqrt{2}<1$ $\cdots$ ①

① と $1<x+y\sqrt{2}\leqq 3+2\sqrt{2}$ $\cdots$ ② より．$4-2\sqrt{2}<2x<4+2\sqrt{2}$

$\therefore$ $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$

$\therefore$ $1\leqq x\leqq 3$ となる．

(i) $x=1$ のとき．

$x^2-2y^2=1$ より．$y=0$ となるが ① をみたさず不適．

(ii) $x=2$ のとき．$x^2-2y^2=1$ をみたす整数 y は存在しない $\therefore$ 不適．

(iii) $x=3$ のとき．

$x^2-2y^2=1$ より．$y=\pm 2$　$y=-2$ のときは ② をみたさず不適．

(i)〜(iii) より．$x=3$, $y=2$ ▨

0001969720308999

早稲田大学

2015年 基幹理工・創造理工・先進理工 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

2 整数 x, y が $x^2-2y^2=1$ をみたすとき，次の問に答えよ．

(1) 整数 a, b, u, v が $(a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=u+v\sqrt{2}$ をみたすとき，u, v を a, b, x, y で表せ．さらに $a^2-2b^2=1$ のときの u^2-2v^2 の値を求めよ．ともに答のみでよい．

(2) $1<x+y\sqrt{2}\leqq 3+2\sqrt{2}$ のとき，$x=3$, $y=2$ となることを示せ．

(3) 自然数 n に対して，$(3+2\sqrt{2})^{n-1}<x+y\sqrt{2}\leqq(3+2\sqrt{2})^n$ のとき，$x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n$ を示せ．

(3) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき，

$1<x+y\sqrt{2}\leqq 3+2\sqrt{2}$ を満たす x, y は (2) より，$x=3$, $y=2$

このとき，$x+y\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$ となり，成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，成り立つと仮定する．

$(3+2\sqrt{2})^{k-1}<x+y\sqrt{2}\leqq(3+2\sqrt{2})^k$ のとき，$x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^k$

が成り立っている．

このとき，

$(3+2\sqrt{2})^k<x+y\sqrt{2}\leqq(3+2\sqrt{2})^{k+1}$ であるとき，両辺に $(3-2\sqrt{2})>0$ をかけて，

$(3+2\sqrt{2})^{k-1}<(3-2\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})\leqq(3+2\sqrt{2})^k$

ここで，(1) において，$a=3$, $b=-2$ として考えると，

$(3-2\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=u+v\sqrt{2}$ ，u, v：整数，$u^2-2v^2=1$ と表せる．

$\therefore (3+2\sqrt{2})^{k-1}<u+v\sqrt{2}\leqq(3+2\sqrt{2})^k$

帰納法の仮定より，$u+v\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^k$

両辺に $(3+2\sqrt{2})$ をかけて，$(3+2\sqrt{2})(u+v\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^{k+1}$

すなわち，$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^{k+1}$

$\therefore x+y\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^{k+1}$

$\therefore n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，題意は成り立つ ▨