2016年 基幹理工・創造理工・先進理工 第2問

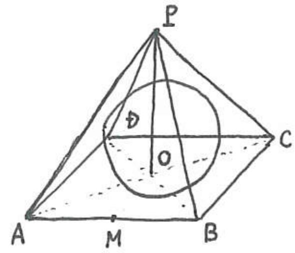
数理 石井K

$\boxed{2}$ 正方形 ABCD を底面，点 P を頂点とする正四角錐 PABCD に内接する球について考える．ただし，正四角錐とは，頂点と底面の正方形の中心を結ぶ直線が底面と垂直になる角錐である．線分 AB の中点を M とし，線分 AM および線分 PM の長さをそれぞれ a，b とする．次の問に答えよ．

(1) 内接する球の半径を a，b を用いて表せ．

(2) $x = \dfrac{b}{a}$ と定めるとき，$\dfrac{\text{内接する球の表面積}}{\text{正四角錐 PABCD の表面積}}$ を x で表わし，その最大値を求めよ．

(3) (2) で最大値をとるときの正四角錐 PABCD の体積を a を用いて表せ．



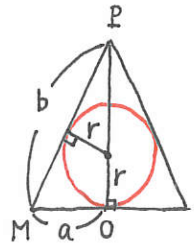
(1) 正方形ABCDの対角線の交点をOとし，平面OPMで

正四角錐PABCDを切断して，切断面を考える．

$OM = AM = a$，$OP^2 + OM^2 = PM^2$ より，

$OP = \sqrt{b^2 - a^2}$ ∴切断面（三角形）の面積を S とおくと，

$S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sqrt{b^2-a^2} = a\sqrt{b^2-a^2}$ …①



一方，内接球の半径を r とおくと，

$S = \frac{1}{2} r(2a+2b) = r(a+b)$ …②

①,②より，$r = \dfrac{a\sqrt{b^2-a^2}}{a+b}$ //

(2) 求める x の関数を $f(x)$ とすると，

$$f(x) = \frac{4\pi r^2}{(2a)^2 + 4 \cdot ab} = \frac{\pi \cdot \frac{a^2(b^2-a^2)}{(a+b)^2}}{a^2+ab} = \frac{\pi a^2(b-a)(b+a)}{a(a+b)^3} = \frac{\pi a(b-a)}{(a+b)^2} = \frac{\pi(\frac{b}{a}-1)}{(1+\frac{b}{a})^2}$$

よって，$f(x) = \dfrac{\pi(x-1)}{(1+x)^2}$ $(x>1)$ → $b>a$ より． //

$$f'(x) = \frac{\pi(1+x)^2 - \pi(x-1)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$= \frac{\pi(3-x)}{(1+x)^3}$$

x	(1)	…	3	…
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	(0)	↗	$\frac{\pi}{8}$	↘

∴右の増減表より，最大値は $\frac{\pi}{8}$ ($x=3$ のとき) //

(3) $V = (2a)^2 \times OP \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}a^2\sqrt{b^2-a^2}$

これに，$x=3 \Leftrightarrow b=3a$ を代入して，$V = \frac{8}{3}\sqrt{2}\,a^3$ //