2016年 商学部 第1問　　1枚目／2枚

1 ア ～ エ にあてはまる数または式を記入せよ.

(1) 2^{100} を 2016 で割った余りは $\boxed{\text{ア}}$ 1024 である.

(2) a, b を正の整数とする．方程式

$$2x^3 - ax^2 + bx + 3 = 0$$

が，1 以上の有理数の解を持つような a の最小値は $\boxed{\text{イ}}$ 5 である.

(3) 正 2016 角形 P がある．頂点がすべて P の頂点であるような正多角形は全部で $\boxed{\text{ウ}}$ 3528 個ある．ただし，頂点の異なる正多角形は異なるものとする.

(4) $\left(\sum_{k=1}^{2016} k \sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2016}\right)\sin\dfrac{\pi}{2016} = \boxed{\text{エ}}$ -1008

(1) $2^{100} = (2^{11})^9 \cdot 2$

$= 2048^9 \cdot 2$

$= (2016+32)^9 \cdot 2$

$\equiv 32^9 \cdot 2 \pmod{2016}$

$\equiv 2^{46}$

$= (2^{11})^4 \cdot 2^2$

$= (2016+32)^4 \cdot 2^2$

$\equiv 2^{22}$

$\equiv (2^{11})^2$

$\equiv 2^{10}$　　∴ 余りは 1024 //

(2) 有理数の解として考えられるのは，$\pm\dfrac{(\text{定数項の正の約数})}{(x^3\text{の係数の正の約数})}$

このうち1以上のものは，$\frac{3}{2}$, 1, 3

(i) $\frac{3}{2}$ を解にもつとき，

$2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 - a\cdot\frac{9}{4} + b\cdot\frac{3}{2} + 3 = 0 \iff 3a - 2b = 13$

∴ a が最小になるのは，$(a, b) = (5, 1)$

(ii) 1 を解にもつとき，

$2 - a + b + 3 = 0 \iff a - b = 5$

a が最小になるのは，$(a, b) = (6, 1)$

(iii) 3 を解にもつとき，

$2\cdot 3^3 - 9a + 3b + 3 = 0 \iff 3a - b = 19$

a が最小になるのは，$(a, b) = (7, 2)$

(i)～(iii) より，$a = 5$ //

2016年 商学部 第1問　　2枚目／2枚

$\boxed{1}$ $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ にあてはまる数または式を記入せよ．

(1) 2^{100} を 2016 で割った余りは $\boxed{ア}$ である．

(2) a，b を正の整数とする．方程式

$$2x^3 - ax^2 + bx + 3 = 0$$

が，1 以上の有理数の解を持つような a の最小値は $\boxed{イ}$ である．

(3) 正 2016 角形 P がある．頂点がすべて P の頂点であるような正多角形は全部で $\boxed{ウ}$ 個ある．ただし，頂点の異なる正多角形は異なるものとする．

(4) $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2016} k \sin \frac{(2k-1)\pi}{2016}\right) \sin \frac{\pi}{2016} = \boxed{エ}$

(3) 正n角形として考えると，nは2016の正の約数である必要があるから，$2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ より，

$n = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, \cdots, 2016$

このうち，$n = 1, 2$ は正n角形ができず不適

各正n角形の個数は，$\dfrac{2016}{n}$ 個あるから

全部で，$\dfrac{2016}{3} + \dfrac{2016}{4} + \dfrac{2016}{6} + \dfrac{2016}{7} + \cdots + \dfrac{2016}{2016} = \underbrace{1+2+3+4+6+7+\cdots+2016}_{\text{正の約数の総和}} - 1008 - 2016$

$= (1+2+2^2+\cdots+2^5)(1+3+3^2)(1+7) - 3024$

$= 63 \times 13 \times 8 - 3024$

$= \underline{3528}$ //

(4) (与式) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{2016}\left(k \sin\frac{(2k-1)\pi}{2016} \cdot \sin\frac{\pi}{2016}\right)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{2016} -\frac{k}{2}\left\{\cos\frac{2k\pi}{2016} - \cos\frac{(2k-2)\pi}{2016}\right\}$

$= -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2016} k\left\{\cos\frac{k\pi}{1008} - \cos\frac{(k-1)\pi}{1008}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{0\cdot\pi}{1008} + \cos\dfrac{1\cdot\pi}{1008} + \cos\dfrac{2\pi}{1008} + \cdots + \cos\dfrac{2015\pi}{1008}\right) - 1008\cos 2\pi$

$= \underline{-1008}$ //