早稲田大学

2016年 スポーツ科学学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ はすべての項が整数であり，次の性質を満たしている．

「正の整数 n の正の約数が k 個あるとき，これらを d_1, d_2, $\cdots$, d_k とすると，

$$a_{d_1} + a_{d_2} + \cdots + a_{d_k} = n$$

が成り立つ.」

(1) $a_5 = \boxed{\text{ツ}}$, $a_6 = \boxed{\text{テ}}$, $a_{49} = \boxed{\text{ト}}$ である．　4　2　42

(2) $a_{5^{100}} = \boxed{\text{ナ}} \cdot 5^{99}$ である．　4

(3) p, q を $p < q$ を満たす2つの素数とする．$a_{pq} = pq - 11$ が成立するならば，$p = \boxed{\text{ニ}}$, $q = \boxed{\text{ヌ}}$ である．　5　7

(1) $n=1$ のときを考えると正の約数は1のみなので，$a_1 = 1$

$n=2$ 〃　1と2なので，$a_1 + a_2 = 2$　∴ $a_2 = 1$

$n=3$ 〃　1と3 〃　$a_1 + a_3 = 3$　∴ $a_3 = 2$

$n=4$ 〃　1と2と4 〃　$a_1 + a_2 + a_4 = 4$　∴ $a_4 = 2$

$n=5$ 〃　1と5 〃　$a_1 + a_5 = 5$　∴ $\underline{a_5 = 4}$〃

$n=6$ 〃　1と2と3と6 〃　$a_1 + a_2 + a_3 + a_6 = 6$　∴ $\underline{a_6 = 2}$〃

同様に $a_7 = 6$，$a_1 + a_7 + a_{49} = 49$ より，$\underline{a_{49} = 42}$〃

(2) $a_1 + a_5 + a_{5^2} + \cdots + a_{5^{99}} + a_{5^{100}} = 5^{100}$

ここで，$a_1 + a_5 + a_{5^2} + \cdots + a_{5^{99}} = 5^{99}$ より．$a_{5^{100}} = 5^{100} - 5^{99} = \underline{4 \cdot 5^{99}}$〃

(3) $a_1 + a_p = p$，$a_1 + a_q = q$ より．$a_p = p-1$，$a_q = q-1$

$a_1 + a_p + a_q + a_{pq} = pq$ より．$a_{pq} = pq - p - q + 1$

∴ $pq - p - q + 1 = pq - 11$ より．$p + q = 12$

p, q はともに素数より．$\underline{(p, q) = (5, 7)}$〃