

2017年 基幹理工・創造理工・先進理工 第4問

4  $n$ を正の整数とする。試行の結果に応じて  $k$  点 ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) が与えられるゲームがある。ここで  $k$  点を獲得する確率は、ある  $t > 0$  によって決まっており、これを  $p_k(t)$  とする。このとき、確率  $p_k(t)$  は  $a \geq 0$  に対して以下の関係式を満足するという。

$$p_0(t) = t^n, \quad p_k(t) = a \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot p_{k-1}(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

次の問に答えよ。

- (1)  $\sum_{k=0}^n p_k(t)$  の値を求めよ。
- (2)  $a$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3) 各  $k$  に対して、 $0 \leq t \leq 1$  の範囲で  $p_k(t)$  を最大にするような  $t$  の値  $T_k$  を求めよ。ただし、 $p_k(0) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ),  $p_n(0) = 1$  と定める。
- (4)  $0 < t < 1$  なる  $t$  を与えたとき、(3) で求めた  $T_k$  に対して、

$$E = \sum_{k=0}^n T_k \cdot p_k(t)$$

とする。  $E$  の値を求めよ。