2017年 基幹理工・創造理工・先進理工 第5問

$\boxed{5}$ 3次の整式 $f(x)=x^3+x^2+px+q$（ただし，$p \neq q$，$q \neq 0$），および $g(x)=\dfrac{-1}{x+1}$ が次の条件 $(*)$ をみたすとする．

$(*)$　$f(x)=0$ の任意の解 α に対して $g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解である．

次の問に答えよ．

(1) p，q の値を求めよ．

(2) $f(x)=0$ は $-2<x<2$ の範囲に3つの実数解をもつことを示せ．

(3) $f(x)=0$ の任意の解を $2\cos\theta$ とするとき，$2\cos 2\theta$，$2\cos 3\theta$ も解であることを示せ．

(4) $2\cos\theta$ $(0<\theta<\pi)$ が $f(x)=0$ の解であるとき，θ の値を求めよ．