



2017年教育第4問

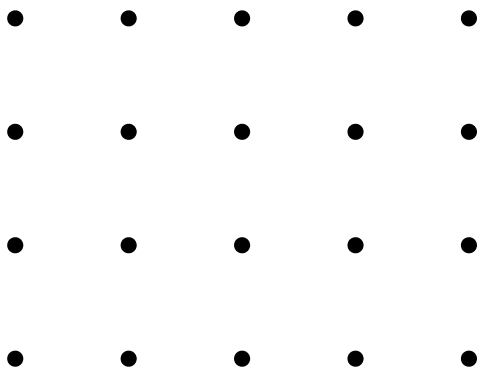
4 平面全体に縦横同じ間隔で電球が置かれていて、次の規則で点滅を繰り返すとする。

初めはすべての電球が消えている。

ある1個の電球が1秒後に点灯し、2秒後にその周りに隣接する8個の電球が点灯する。3秒後には、さらにその外側に隣接する電球が点灯する。一般に $n+1$ 秒後には、 $n$ 秒目に初めて点灯した電球の外側に隣接する電球が点灯する。

一度点灯した電球は「2秒間点灯して次の1秒間消灯」を繰り返す。

下の図は電球の配置の一部分を示している。



$n \geq 1$ とする。 $n$ 秒後に初めて点灯する電球の個数を $a_n$ とし、 $n$ 秒後に点灯している電球の個数を $b_n$ として、次の問に答えよ。

- (1)  $a_n$ を $n$ を用いた式で表せ。
- (2)  $b_n$ を $n$ を用いた式で表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2}$ を求めよ。