

2012年教育第4問

4 円  $C$  とその内部の点  $P_0$  が与えられている．初め  $P_0$  にある動点が，円周上の点  $P_1$  まで線分  $P_0P_1$  上を動き， $P_1$  からは， $P_1$  における円  $C$  の接線  $\ell_1$  と線分  $P_0P_1$  のなす角が  $\ell_1$  と線分  $P_1P_2$  のなす角に等しくなるように向きを変えて，円周上の点  $P_2$  まで線分  $P_1P_2$  上を動く（図例1）．以下，自然数  $n$  について，円周上の点  $P_n$  に至ったあとは， $P_n$  における円  $C$  の接線  $\ell_n$  と線分  $P_{n-1}P_n$  のなす角が  $\ell_n$  と線分  $P_nP_{n+1}$  のなす角に等しくなるように向きを変え，円周上の点  $P_{n+1}$  まで線分  $P_nP_{n+1}$  上を動き，この動きをくり返す（図例2）．線分  $P_0P_1$  と接線  $\ell_1$  のなす角を  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ) とする．

- (1)  $P_m = P_1$  となる3以上の自然数  $m$  が存在するような角  $\alpha$  をすべて決定せよ．
- (2) 点  $P_1$  の位置によって角  $\alpha$  は変化し得る．角  $\alpha$  が最大となる  $P_1$  の位置，および最小となる  $P_1$  の位置を求めよ．
- (3)  $P_4 = P_1$  となる点  $P_1$  がとれるような点  $P_0$  の存在範囲を求めよ．

