早稲田大学

2014年 社会科学学部 第1問

$\boxed{1}$ 2つの関数

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$$
$$g(x) = -9x^2 + 6x + a$$

に対して，次の問に答えよ．ただし a は定数とする．

(1) $f(x)$ の極大値および極小値を与える x の値をそれぞれ α，β とおく．α および β の値を求めよ．

(2) 任意の $x > \alpha$ に対して，$f(x) \geqq g(x)$ を満たす a の値の範囲を求めよ．

(3) 任意の $x_1 > \alpha$ および任意の $x_2 > \alpha$ に対して，$f(x_1) \geqq g(x_2)$ を満たす a の値の範囲を求めよ．

(1) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x-2)(x+1)$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは，$x = -1, 2$

右の増減表より，$\underline{\alpha = -1,\ \beta = 2}$ //

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$
		極大		極小	

(2) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと，

$h(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x - a$

$\therefore$ $h'(x) = 6(x+3)(x-1)$

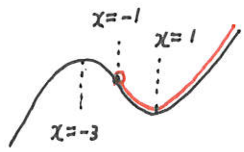
$\therefore$ $h'(x) = 0$ となるのは，$x = -3, 1$

$\therefore$ 任意の $x > -1$ に対して，$f(x) \geqq g(x)$

$\Leftrightarrow$ $h(1) \geqq 0$

$\therefore$ $-10 - a \geqq 0$ $\therefore$ $\underline{a \leqq -10}$ //

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
				$22-a$		$-10-a$	



(3) $x > -1$ における $f(x)$ の最小値は $f(2) = -20$

$x > -1$ における $g(x)$ の最大値は，$g(x) = -9\underbrace{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}_{\text{軸は } x = \frac{1}{3}} + 1 + a$ であることから，

$$g\left(\tfrac{1}{3}\right) = a + 1$$

$\therefore$ $-20 \geqq a + 1$ $\therefore$ $\underline{a \leqq -21}$ //