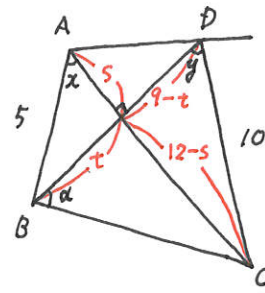


2014年 社会科学学部 第2問

2 4つの角がすべて π 未満である平面上の四角形 ABCD において $AB = 5$, $CD = 10$ とする. また, 対角線 AC と BD は互いに直交し, $AC = 12$, $BD = 9$ とする. $\angle BAC = x$, $\angle BDC = y$, $\angle CBD = \alpha$ とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) $\sin x$ および $\sin y$ の値を求めよ.
 (2) $\sin \alpha$ および $\cos \alpha$ の値を求めよ.
 (3) ベクトル \vec{BA} と \vec{BC} の内積 $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ の値を求めよ.



(1) 右の図において.

$$\sin x = \frac{t}{5}, \quad \cos x = \frac{5}{5}, \quad \sin y = \frac{12-5}{10}, \quad \cos y = \frac{9-t}{10}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{t^2 + 5^2}{25} = 1 \quad \therefore t^2 + 5^2 = 25 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\sin^2 y + \cos^2 y = \frac{(12-5)^2 + (9-t)^2}{100} = 1 \quad \therefore t^2 - 18t + 81 + 5^2 - 24t + 144 = 100$$

$$\therefore t^2 - 18t + 5^2 - 24t + 125 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて. $t = 3, 5 = 4$

$$\therefore \sin x = \frac{3}{5}, \quad \sin y = \frac{4}{5}$$

(2) 三平方の定理より. $BC^2 = 3^2 + 8^2 = 73 \quad \therefore BC = \sqrt{73}$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{8}{\sqrt{73}} = \frac{8\sqrt{73}}{73}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{73}} = \frac{3\sqrt{73}}{73}$$

(3) $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos \angle ABC$ 余弦定理より $\cos \angle ABC = \frac{5^2 + 73 - 12^2}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{73}}$

$$= 5 \cdot \sqrt{73} \cdot \left(-\frac{23}{5\sqrt{73}} \right) = \frac{-46}{10\sqrt{73}}$$

$$= -23 = -\frac{23}{5\sqrt{73}}$$