

2014年教育第4問

4 2個以上の正の整数を要素とする有限集合を A とする.

A のどの2数も一方が他方を割り切るとき A は良い集合であるといい, A のどの2数も互いに他を割り切らないとき A は悪い集合であるという.

また, A の良い部分集合の要素の個数の最大値, すなわち,

$$\max \{n(B) \mid B \subset A, n(B) \geq 2 \text{ かつ } B \text{ は良い集合}\}$$

を A の最良数と定義し, A の悪い部分集合の要素の個数の最大値, すなわち,

$$\max \{n(B) \mid B \subset A, n(B) \geq 2 \text{ かつ } B \text{ は悪い集合}\}$$

を A の最悪数と定義する.

たとえば, $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 14, 15, 77, 154, 225, 231, 308\}$ のとき, A の良い部分集合は $\{7, 77, 231\}$, $\{7, 14, 154, 308\}$, $\{11, 77, 154, 308\}$ などであり, A の最良数は4である. また, A の悪い部分集合は $\{231, 308\}$, $\{14, 15, 77\}$, $\{2, 7, 11, 15\}$, $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ などであり, A の最悪数は5である.

k を2以上の整数とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $n(A) = k^2$ で, かつ最良数も最悪数も k である集合 A が存在することを証明せよ.
- (2) $n(A) \geq k^2 + 1$ ならば, A の最良数または A の最悪数のどちらかは $k + 1$ 以上であることを証明せよ.
- (3) 要素数が2014で, かつ最良数と最悪数が等しいような集合, すなわち,

$$n(A) = 2014 \quad \text{かつ} \quad (A \text{ の最良数}) = (A \text{ の最悪数})$$

を満たす集合 A を考える. このような集合たちの中で最良数が最小となる集合の例を挙げよ.