

2015年教育第4問

4 座標平面の第1象限に曲線 $C_0 : y = \frac{1}{x} + x$ ($x > 0$) と曲線 $C : y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) がある。 C_0 上の点 $(a, \frac{1}{a} + a)$ における C_0 の接線を l とする。このとき、 l は曲線 C と2点で交わっているとす。

- (1) このように、接線 l と曲線 C が2点で交わる a の範囲を求めよ。
- (2) 接線 l と曲線 C とで囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) 上の(2)で求めた面積を $S(a)$ とするとき、

$$\frac{a^3}{1-a^2} < S(a) < \frac{2a}{1-a^2}$$

が成り立つことを示せ。